Лекция №5

Разложение полей по естественным ортогональным функциям.

Для более полного описания особенностей метеорологических полей, а также для сжатия информации часто применяют аппарат разложения метеорологических полей в ряды по естественным ортогональным функциям (ЕОФ). Этот аппарат был разработан и внедрен в практику такими видными учеными, как А. Н. Обухов, Н. А. Багров, М. И. Юдин.

Пусть на n метеорологических станциях синхронно в течение m сроков измеряется значение метеорологической величины. Каждый из отдельных элементов можно обозначить F_{mn}. Совокупность всех наблюдений представляется прямоугольной матрицей

$$\begin{matrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ . & . & . & . \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{matrix} \qquad (5.1)$$

Формально можно разложить любое индивидуальное поле метеоэлемента, представляющего вектор-строку в (6.1), в ряд по некому ортогональному базису φ^k, где k - номер базисной функции (вектора). Коэффициенты разложения будут, при этом, зависеть от времени, а базисные вектора – от пространства, то есть от номера станции. Таким образом, необходимо найти разложение вида

$$F_{mn} = \sum_k A_{km} \varphi_n^k \qquad ,(5.2)$$

где суммирование ведется по всем значениям индекса k, а индексы $n, m,$ указывают на пространственную принадлежность соответствующего члена в (5.2). Чаще всего базисные вектора априорно известны. Например, это могут быть тригонометрические функции, полиномы Лежандра, сферические гармоники и т.д. Но в данном случае естественные вектора целиком и полностью определяются статистической структурой рассматриваемого поля и находятся совместно с коэффициентами разложения A_{km} методом наименьших квадратов по наблюдениям (5.1). В этом и заключается принципиальное отличие разложения по *естественному базису* от разложения по любому другому.

Обратим среднюю квадратическую ошибку Δ в минимум по формуле

$$\Delta = \sum_m \sum_n (F_{mn} - \sum_k A_{km} \varphi_n^k)^2 \to \min \qquad (5.3).$$

Для того чтобы условие (6.3) выполнялось, необходимо приравнять все частные производные по неизвестным $A_{km,} \varphi_n^k$ нулю, и решить определяющую систему уравнений.

Во-первых, запишем систему уравнений для определения коэффициентов разложения A_{km}. Для любого k и для любого m можно записать

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A_{km}} = 0. \qquad (5.4)$$

или

$$\sum_n F_{mn} \varphi_n^k = A_{km} \sum_n {\varphi_n^k}^2 \qquad (5.5).$$

Из условия ортонормированности базиса, которое определяется соотношением (6.6)

$$\sum_n \varphi_n^k \varphi_n^l = 0, \text{ если } k \neq l \text{ и}$$
$$\sum \varphi_n^k \varphi_n^l = 1, \text{ если } k = l. \qquad (5.6)$$

получаем следующую формулу для коэффициентов разложения A_{km}

$$A_{km} = \sum_n F_{mn} \varphi_n^k \qquad (5.7)$$

Определим теперь систему уравнений для нахождения составляющих базисных векторов φ_n^k. Для любого номера вектора k и любой его составляющей n получаем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_n^k} = 0, \qquad (5.8)$$

или

$$\sum_m F_{mn} A_{km} = \varphi_n^k \sum_m A_{km}{}^2 \qquad (5.9).$$

Подставим в (6.9) формулу (6.7). При этом получаем следующее соотношение

$$\sum_m F_{mn} F_{mn'} \varphi_n^k = \lambda_k \varphi_n^k \qquad (5.10), \text{ где}$$

λ_k – собственное число корреляционной матрицы R раскладываемого поля, а естественные вектора φ^k представляют собой собственные вектора этой матрицы. Индекс n' заменяет индекс n в случае суммирования по нему. Элемент корреляционной матрицы R запишем в виде

$$R_{n'n} = \sum_m F_{mn} F_{nn'} \qquad (5.11).$$

Как видно из (6.11) матрица R является симметричной и действительной. Поэтому, все ее собственные числа вещественны. Так как собственные числа корреляционной матрицы рассчитываются по формуле

$$\lambda_k = \sum_m A_{km}{}^2, \qquad (5.12)$$

они, к тому же, могут быть только положительными, или равными нулю. Отсюда следует, что матрица коэффициентов разложения A является неотрицательной. Для таких матриц разработан определенный алгоритм нахождения их собственных чисел и собственных векторов. Если для наглядности переписать систему (6.10) в операторном виде, предварительно умножив λ на единичную матрицу E, то получается линейная система уравнений с нулевой правой частью.

$$R(\varphi - \lambda E) = 0 \qquad (5.13)$$

Из линейной алгебры известно, что однородная система уравнений имеют не тривиальное решение только в случае равенства нулю ее определителя. Приравняв определитель матрицы системы (6.13) нулю, получим уравнение k – ой степени, корни которого и будут определять λ_k. Решив линейную систему (6.13) для всех λ, и применив условие ортонормированности базиса, получим естественные вектора φ. Так как все собственные числа λ_k либо положительны, либо нулевые, их можно разместить в порядке убывания, то есть записать, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > ...\lambda_k \qquad (5.14).$$

После того, как найдены все собственные числа и собственные вектора корреляционной матрица раскладываемого поля, можно приступить к поиску коэффициентов разложения A_{km} по формуле (6.7). Условие ортонормированности базиса можно записать в виде

$$\sum_n (\varphi_n^k)^2 = 1 \qquad (5.15),$$

то есть «длина» каждого вектора равна единице.

Выясним теперь физический смысл разложения по ЕОФ. Можно сказать, что разложение совокупности полей по собственным векторам корреляционной матрицы есть ни что иное, как разложение поля по наиболее вероятным, некоррелированным между собой, характерным ситуациям. Чаще всего встречаются ситуации с большими собственными числами. Само же собственное число λ_k представляет собой долю общей дисперсии поля, которую описывает соответствующий ему собственный вектор φ_k.

Если количество векторов равно числу станций, то формула (6.2) выполняется точно. Если число векторов меньше числа станций, то возникает погрешность разложения, которая вычисляется по формуле

$$\Delta_{nm} = \sum_n (F_{mn} - \sum_k^H A_{km}\varphi_n^k)^2, \qquad (5.16)$$

где H - количество собственных векторов, взятых для разложения. Если $n = H$, то погрешность равна нулю. Относительная мера точности разложения по H векторам равна

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_k^H \lambda_k}{\sum_k^n \lambda_k}. \qquad (5.17)$$

Так как все собственные числа положительные, то, привлекая последовательно один, два, три и так далее до $H = n$ векторов, точность разложения возрастает.