Лекция 10

Объективный анализ метеорологических данных. Горизонтальный контроль. Методы интерполяции данных по горизонтали. Полиномиальная интерполяция.

Под объективным анализом метеорологических полей понимают математические методы интерполяции наблюдений, полученных со станций в узлы регулярной сетки. Хотя основное назначение объективного анализа состоит в подготовке исходных данных для гидродинамического прогноза, его возможности существенно шире. Объективный анализ применяется для получения различных диагностических полей, которые используются в климатических исследованиях.

К настоящему моменту разработаны различные методы объективного анализа, основой которых являются процедуры интерполяции и согласования полей. Остановимся на одном из методов горизонтального контроля и интерполяции полей – полиномиальной интерполяции.

Для построения интерполяционного полинома в горизонтальной плоскости , который интерполировал бы данные из близлежащих станций в узел регулярной сетки, поместим начало координат в соответствующий узел. (См. рис. 8.1).

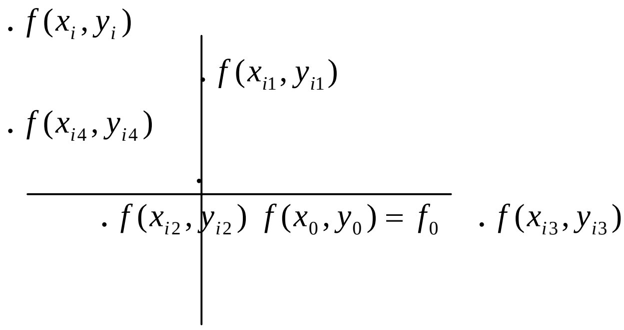

Рис. 10.1.

На рис 8.1. значение функции в узле является f_0 (оно нам неизвестно), а значения функции на станциях равны соответственно $f(x_i, y_i)$. Значения метеорологической величины на станциях известны из метеорологических или аэрологических телеграмм. Количество и расположение влияющих станций выбирается из условия близости станций и узла. Построим полином n-ой степени во всей области, окружающей узел, которая включала бы все выбранные влияющие станции. По правилам интерполяции полином должен иметь степень, на единицу меньшую, чем количество влияющих станций. При большом количестве влияющих станций такое построение затруднительно. Поэтому выбираем степень полинома не больше двух, а коэффициенты полинома находим методом наименьших квадратов.

Иными словами

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_j F_j \qquad (10.1),$$

где F_j - различные степенные одночлены, а a_j - коэффициенты полинома. Для полинома степени $n = 2$ соотношение (8.1) запишем в виде

$$f(\quad x, y) = a_1 F^0 + a_2 F^1 + a_3 F^2 \quad (10.2),$$

где $F^0 = 1, F^1 = x, F^2 = x^2$. Для простоты изложения будем считать, что изменений по координате y нет, то есть функция является функцией только одной координаты x.

Неизвестные коэффициенты a_1, a_2, a_3 определим из нормальной системы уравнений, по методу НК.

$$\frac{\partial e}{a_1} = 0, \frac{\partial e}{a_2} = 0, \frac{\partial e}{a_3} = 0. \text{(8.3)}$$

e - средняя квадратическая ошибка, которая определяется по формуле

$$e = \sum_i^n (f_i - \sum_j^m a_j F_j)^2 \quad , \qquad (10.4)$$

где n равно количеству влияющих станций.

Возьмем производные $\frac{\partial e}{a_j}$ и приравняем их нулю. Тогда получим следующую систему уравнений

$$na_1 + (\sum_i^n x_i) a_2 + (\sum_i^n x_i^2) a_3 = \sum_i^n f_i$$

$$(\sum_i^n x_i) a_1 + (\sum_i^n x_i^2) a_2 + (\sum_i^n x_i^3) a_3 = \sum_i^n f_i x_i \qquad (10.5)$$

$$(\sum_i^n x_i^2) a_1 + (\sum_i^n x_i^3) a_2 + (\sum_i^n x_i^4) a_3 = \sum_i^n f_i \; x^2$$

В системе (8.5) x_i - координата станции. Обратим внимание на то, что полином (8.2) интерполирует функцию во всей области, которой принадлежат станции и узел. Значение в узле получим, приравняв x нулю.

Примеры.

Пусть функция $f(x\ ) = f_i$ задана в шести точках, то есть $n = 6$. Получить полином второй степени, сводивший к минимуму среднюю квадратическую ошибку, если узел находится в середине отрезка. Расстояние между станциями одинаковое и равное l. (см. рис. 8.2)

f_1 f_2 f_3 f_0 f_4 f_5 f_6

x_1 x_2 x_3 0 x_4 x_5 x_6

Расположение станций и узлов в полиномиальной интерполяции.

рис.10.2.

В этом случае (начало координат располагается в узле) координаты влияющих станций соответственно равны –2,5l, -1,5l, -0,5l, 0,5l, 1,5l, 2,5l. Подставляя значения координат в систему уравнений (8.5), можно получить следующую систему

$$
\begin{aligned}
&6a_0 + \sum_i^6 x_i^{\;2} a_2 = \sum_1^6 f_i \\
&\sum_i^6 x_i^{\;2} a_1 = \sum_i^6 f_i x_i \qquad\qquad (10.6) \\
&\sum x_i^{\;2} a_0 + \sum x_i^{\;4} a_2 = \sum_i^6 f_i x_i^{\;2}
\end{aligned}
$$

Решив ее, можно определить значения коэффициентов полинома.