Лекция 9

Сплайн-интерполяция. Одномерный кубический сплайн.

1. Определение интерполяции метеорологических полей.

Интерполяция – это определение (вычислительным или графическим путем) промежуточных значений некоторой функции $y = f(x)$, заданной дискретным рядом ее значений $y_1, y_2, ..., y_n$, полученных эмпирически (например, ряд значений метеорологического элемента). При этом находится приближенная функциональная связь $y = v(x)$, удовлетворяющая наблюденным значениям y. Функция $y = v(x)$ называется интерполирующей функцией. Этой интерполирующей функцией может быть интерполяционный полином Лагранжа степени $n-1$. Но при большом числе интерполяционных узлов n применение такого полинома затруднительно, так как его степень будет очень велика.

В настоящее время для решения задач интерполяции, особенно для интерполяции по вертикали, используются сплайн - полиномы. Простейший вариант сплайна общеизвестен. Это – обычная ломаная, которую можно построить по узлам x_n и значениям y_n. Сплайном порядка m дефекта k называется функция, которая

а) на каждом подинтервале (x_{i-1}, x_i) совпадает с каким-нибудь многочленом степени m (причем m меньше n)

в) в точках $x_2, ... x_{N-1}$ непрерывны $(n-k)$ производных.

Чаще всего в метеорологии используется кубический сплайн с параметрами $m = 3, k = 1$.

2. Этапы построения одномерного кубического сплайна.

Сформулируем конкретную задачу построения одномерного кубического сплайна.

Построить одномерный кубический сплайн $g(x)$ на отрезке (a,b), такой,

чтобы в узлах интерполяции x_i $g(x_i) = f_{i_i}$ (то есть в узлах интерполяции сплайн должен равняться самой функции),

вторые производные сплайна на концах отрезка должны быть равны нулю ($g''(a) = g''(b) = 0$). Эти условия называется «естественными граничными условиями»

$g(x), g'(x), g''(x)$ непрерывны на всем отрезке (a,b)

Для того, чтобы построить одномерный кубический сплайн, необходимо совершить следующие действия:

1. Найдем вторую производную на любом i-том отрезке интервала (a,b). Под i-тым отрезком мы будем понимать отрезок (i,i-1), а длина этого отрезка

вычисляется по формуле

$$h_i = x_i - x_{i-1} \;. \qquad (9.1)$$

Уравнение прямой запишем в виде

$$g''(x) = g''(x_{i-1})(x_i - x)h_i^{-1} + g''(x_i)(x - x_{i-1})h_i^{-1} \quad (9.2)$$

Обозначим

$$g''(x_{i-1}) = m_{i-1}, g''(x_i) = m_i \qquad (9.3)$$

и возьмем неопределенный интеграл от $g''(x)$. Получим первую производную

$$g'(x) = -m_{i-1}(x_i - x)^2 0.5h_i^{-1} + m_i(x - x_{i-1})^2 o.5h \;+\mathrm{A} \;. \qquad (9.4)$$

Если взять неопределенный интеграл от $g'(x)$, то получим формулу для сплайна на i-том отрезке

$$g(x) = m_{i-1}(x_i - x)^3 \frac{1}{6} h_i^{-1} + m_i(x - x_{i-1})\frac{1}{6} h_i^{-1} + Ax + B \,. \quad (9.5)$$

Для определения постоянных интегрирования A и B воспользуемся тем, что в узлах интерполяции $g(x_i) = f(x_i)$. Подставим в формулу (9.5) вместо линейной комбинации $Ax + B$ линейную комбинацию

$$C(x - x_{i-1})h_i^{-1} + D(x_i - x)h_i^{-1} \qquad (9.6)$$

и вместо x сначала x_i, а затем – x_{i-1}.В результате получим формулы для определения постоянных интегрирования C и D в виде:

$$C = f_i - \frac{m_i}{6} h_i^2 \qquad (9.7),$$

$$D = f_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6} h_i^2 \qquad (9.8).$$

Подставим в (9.5) формулы (9.7) и (9.8) и получим окончательное выражение для кубического сплайна на любом i-том отрезке

$$g(x) = m_{i-1}(x_i - x)^3 \frac{1}{6h_i} + m_i(x - x_{i-1})^3 \frac{1}{6h_i} + (f_i - \frac{m_i}{6} h_i^2)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ + (f_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6} h_i^2)\frac{x_i - x}{h_i} \qquad (9.9)$$

В выражении (9.9)неизвестными являются вторые производные сплайна на концах каждого i-того отрезка. Для их определения необходимо использовать условие «склейки» сплайна, то есть условие непрерывности первых производных в узлах интерполяции x_i.

Это можно записать таким образом:

$$g'(x_i+0) = g'(x_i-0) \qquad (9.10)$$

На основании формулы (9.10) приравняем первые производные в точках i на конце i-того и i+1 –ого отрезков. При этом получим линейную систему уравнений для определения

m_{i-1} и m_i. Для каждого отрезка уравнение этой системы будет иметь следующий вид:

$$m_{i-1}\frac{h_i}{6}+m_i(\frac{h_i}{3}+\frac{h_{i+1}}{3})+m_{i+1}h_{i+1}\frac{1}{6}=f_{i-1}\frac{1}{h_i}-f_i(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}})+f_{i+1}\frac{1}{h_{i+1}} \quad (9.11)$$

По условиям задачи система уравнений (9.11) решается при нулевых граничных условиях.

Данная система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и ее можно решать методом прогонки.

Для решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей (9.11) воспользуемся методом прогонки. Матрица линейной системы уравнений (9.11) хорошо обусловлена, так как имеет место диагональное преобладание:

$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$

Для того, чтобы рассчитать значения прогоночных коэффициентов и неизвестных, перепишем уравнение (9.11)в следующем виде:

$a_i m_{i-1} + b_i m_i + c_i m_{i+1} = F_i$,(9.12) где

$$a_i=\frac{h_i}{6}, b_i=\frac{h_i}{3}+\frac{h_{i+1}}{3}, c_i=\frac{h_{i+1}}{6}, F_i=\frac{f_{i-1}}{h_i}-f_i(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}})+\frac{f_{i+1}}{h_{i+1}}. \quad (9.13)$$

Прогоночные коэффициенты L и K вычисляются по следующим формулам

$$L_{i+0.5}=-c_i(b_i+a_iL_{i-0.5})^{-1}, K_{i+0.5}=\frac{f_i}{b_i+a_iL_{i-0.5}}-\frac{a_iK_{i-0.5}}{b_i+a_iL_{i-0.5}}. \quad (9.14)$$

Половинные индексы означают, что прогоночные коэффициенты рассчитываются на прямом ходу прогонки. На обратном ходу прогонки вычисляются неизвестные, причем при «естественных граничных» условий имеет место равенство нулю неизвестных на концах отрезка (a,b). Иными словами, $m_0 = m_N = 0$, где N=5.

Неизвестные m_i можно рассчитать по следующей формуле:

$m_i = L_{i+0.5} m_{i+1} + K_{i+0.5}$ (9.15).