Лекция № 6
Спектральный анализ стационарных случайных процессов.

6.1 Спектр случайного процесса

Для исследования неслучайных функций весьма широкое применение получил гармонический анализ, то есть разложение функций в виде ряда Фурье, если функции периодические, и в виде интеграла Фурье – если функции непериодические.

Остановимся сначала более подробно на разложении неслучайных функций в ряды по тригонометрическому базису.

Если функция $f(t)$ имеет период колебаний $2T$, непрерывна и удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно представить в виде комплексного ряда

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{it\frac{\pi k}{T}}. \quad , \qquad (6.1)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-ti\frac{\pi k}{T}} dt. \qquad (6.2)$$

Формула (6.1) позволяет представить функцию $f(t)$ в виде бесконечной суммы гармонических колебаний с частотами $\frac{\pi k}{T} = \omega_k$ и амплитудами C_k, так как известно, что

$$e^{it\varpi_k} = \cos\varpi_k t + i\sin\omega_k t \qquad (6.3)$$

Последовательность комплексных чисел C_k спектром функции $f(t)$. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данной функции. В данном примере частота колебаний принимает дискретные значения ω_k, следовательно, функцию $f(t)$ называют функцией с дискретным спектром.

Аналогично, если функция непериодическая и существует несобственный интеграл, $\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt,$ то ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (6.4)$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \qquad (6.5)$$

Формула (6.5) будем называть прямым преобразованием Фурье, а формулу (6.4) – обратным преобразованием Фурье.

Остановимся на физическом смысле функции $F(\varpi)$, которую называют непрерывным спектром или спектральной плотностью функции $f(t)$. Из приведенных формул следует, что спектр однозначно определяет функцию и наоборот.

Рассмотрим применение аппарата спектральных разложений к стационарным случайным процессам.

Пусть реализации случайного процесса $X(t)$, которые являются периодическими функциями с периодом T, представлены в виде гармонических колебаний. Тогда сам случайный процесс, который является их совокупностью, можно представить в виде ряда со случайными амплитудами X_k

$$X(t) = \sum_{-\infty} X_k e^{i\omega_k t}, \qquad (6.6)$$

где ω_k - частоты колебаний. Будем считать, что математическое ожидание случайного процесса равно нулю. Тогда корреляционная функция случайного процесса $R_x(\tau)$ можно также представить в виде ряда, в котором коэффициенты разложения представляют собой дисперсии каждого к-го колебания. Иными словами

$$R_x(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k \tau} \quad . \qquad (6.7)$$

Для существования корреляционной функции ряд (6.1.7) должен быть сходящимся, то есть должен сходиться ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| D_k e^{i\omega_k \tau} \right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \qquad (6.8)$$

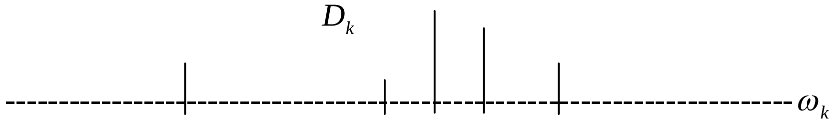
Мы предположили, что случайный стационарный процесс может быть разложен в ряд (6.6), ничем не оговорив условия этого разложения. При этом получили, что корреляционная функция определяется в виде ряда (6.7), а случайные амплитуды X_k - взаимно некоррелированные случайные величины.

Советский математик Е.Е.Слуцкий доказал теорему, что всякий стационарный случайный процесс, имеющий корреляционную функцию (6.7), может быть представлен в виде ряда (6.6). Для такого ССП спектром называется распределение дисперсий по частотам ω_k. Дисперсию случайного процесса D_x получим, положив в формуле (6.7) $\tau = 0$. При этом

$$D_x = R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \qquad (6.9)$$

Следовательно, дисперсия случайного процесса равна сумме ряда, составленного из всех ординат спектра.

На рис.6.1. представлен спектр случайного процесса.



6.1.

По оси абсцисс отложены значения частот, а по оси ординат – соответствующие им дисперсии.

Спектральная плотность ССП

Рассмотрим теперь ССП, заданный на всей вещественной оси. Для определения корреляционной функции в этом случае осуществим в формуле (6.7) предельный переход. Это равносильно бесконечному уменьшению интервала между частотами

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}.$$

Если обозначить через $S_x(\omega)$ среднюю плотность дисперсии в диапазоне частот $\Delta\omega_k$, то корреляционную функцию можно записать в виде интеграла

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \,. \qquad (6.10)$$

Функция $S_x(\omega)$ называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса $X(t)$. Она представляет собой плотность дисперсии случайного процесса при данной частоте ω. Прямым преобразованием Фурье можно получить формулу для ее определения:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \qquad (6.11)$$

Так как спектральная плотность является неотрицательной функцией, то корреляционной функцией ССП может служить только функция, преобразование Фурье которой является неотрицательной функцией при всех значениях частоты ω.

А. Я. Хинчин показал, что и каждая функция, являющаяся обратным преобразованием Фурье от неотрицательной функции, является корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса.

Полагая в формуле (6.2.1) $\tau = 0$, получим выражение для дисперсии случайной функции

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (6.12)$$

Можно рассматривать и нормированную спектральную плотность $s_x(\omega)$. Ее можно получить по формуле

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x} \qquad (6.13)$$

В силу четности функций $R_x(\tau), S_x(\omega)$ для вещественного случайного процесса можно записать

$R_x(\tau) = \int S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega$, $S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau$. Аналогичные формулы можно записать для нормированной корреляционной функции и нормированной спектральной плотности вещественного случайного процесса. Функцию $S_x(\omega)$

можно изобразить графически.

$$D_x = R_x(0) = 2\int_0^{\infty} S_x(\omega)d\omega, \qquad (6.14)$$

то дисперсия есть удвоенная площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$, построенной для $\omega = 0$, или площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$ во всем интервале $(-\infty, \infty)$.

Если построить график нормированной спектральной плотности, то площадь, лежащая под ним, равна единице, так как

$$r_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)d\omega = 1. \qquad (6.15)$$

Определим спектральные плотности стационарных случайных процессов.

Пример 1. Пусть стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет нормированную корреляционную функцию

$$r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0. \qquad (6.16)$$

Согласно (6.2.2), нормированная спектральная плотность при этом определится в виде

$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi}\{\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau(\alpha-i\omega)} d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau(\alpha+i\omega)} d\tau\} = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}. \end{aligned} \qquad (6.17)$$

Это четная функция, достигающая наибольшего значения, равного $\frac{1}{\alpha\pi}$,

При частоте $\omega = 0$.

Рассмотрим зависимость корреляционной функции и соответствующей ей спектральной плотности от параметра α . С ростом параметра α корреляционная функция резко уменьшается, так как связь между сечениями убывает. При малых значениях α имеем пример узкополосного спектра.

При увеличении α имеет место широкополосной спектр. Случайный процесс, спектральная плотность которого постоянная во всем частотном интервале, называется «белым шумом» по аналогии с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден. Такой процесс физически не реализуем, так как его дисперсия обращается в бесконечность. Однако его можно рассматривать как предел реального широкополосного случайного процесса при стремлении α к бесконечности. Примером чисто случайного процесса, сечения которого не коррелированны между собой, может служить случайный процесс ошибок измерений.

Пример 2.

Пусть $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau, \alpha > 0, \beta > 0. \qquad (6.18)$

Соответствующая ей спектральная плотность имеет вид

$$s_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\omega^2\beta^2}. \qquad (6.19)$$

В данном случае корреляционная функция определяется отношением параметров α и β. Параметр α определяет скорость затухания амплитуды колебаний корреляционной функции, параметр β определяет период этого колебания. При малой величине отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ имеем пример узкополосного спектра, где максимум спектральной плотности сосредоточен у частоты $\omega = \beta$. При увеличении этого отношения спектр становится широкополосным.