Лекция 4

Случайное поле. Характеристики случайного поля. Однородное и изотропное случайное поле.

Помимо случайных процессов в метеорологии очень часто применяется такое понятие, как случайное поле. Случайное поле – это случайная функция от нескольких независимых переменных. Рассмотрим случайное поле, $U(x,y,z,t)$, где $x.y,z-$пространственные координаты точки, а $t-$ время. Пространственные координаты и временную координату можно рассматривать как координаты некого четырехмерного вектора $\rho(x,y,z,t)$ и обозначать случайное поле в виде $U(\rho)$. Аналогично случайным процессам, случайное поле можно рассматривать, с одной стороны, как совокупность всех его реализаций, а с другой стороны, как совокупность всех его сечений. Под реализацией случайного поля можно, например, представить себе карту распределения какой-нибудь метеорологической величины за определенный срок наблюдений, а под случайным сечением - характеристики этой величины при фиксированных значениях $x,y,z,$ в различные моменты времени.

Будем называть $n-$мерной функцией распределения случайного поля $U(\rho)$ функцию распределения системы случайных величин

$$F_u(u_1,u_2,...;\rho_1,\rho_2,...\rho_n) = P(U_1 < u_1, U_2 < u_{2.}...,U_n < u_n). \qquad (4.1)$$

Для полной характеристики случайного поля нужно задать все его $n-$мерные функции распределения.

Если существуют смешанные частные производные от функций распределения (4.1), то их называют $n-$мерными плотностями распределения случайного поля.

$$f_n(u_1,u_2,...,u_n;\rho_1,\rho_{2,...,}\rho_n) = \frac{\partial^n F_u}{\partial u_1 \partial u_2 ... \partial u_n} \qquad (4.1.1)$$

Как и для случайного процесса, на практике редко удается определить $n-$мерные функции распределения или плотности распределения, поэтому для характеристики случайного поля используются главным образом *моменты* распределения. Так, момент первого порядка $m_u(\rho)$ называется математическим ожиданием случайного поля. Отклонение случайного поля от его математического ожидания называется центрированным случайным полем

$$\overset{0}{U}(\rho) = U(\rho) - m_u(\rho) \qquad (4.2)$$

Одноточечный центральный момент второго порядка $D_u(\rho)$ называется дисперсией случайного поля. Математическое ожидание и дисперсия случайного поля являются неслучайными функциями координат точек пространственно-временной области:

$m_u(\rho) = m_u(x,y,z,t); D_u(\rho) = D_u(x,y,z,t).$

Двухточечный центральный момент второго порядка

$$R_u(\rho_1,\rho_2)$$

называют корреляционной функцией случайного поля. Она является уже функцией координат двух точек пространственно-временной области. Корреляционная функция случайного поля обладает теми же свойствами, что и корреляционная функция случайного процесса. В частности, выполняется свойство симметрии

$$R_u(\rho_1,\rho_2) = R_u(\rho_2,\rho_1)$$

При одинаковых значениях векторных аргументов корреляционная функция превращается в дисперсию случайного поля. Рассматривают также нормированную корреляционную функцию. Для каждой пары точек $\rho_1, \rho_2$ нормированная корреляционная функция превращается в коэффициент корреляции между двумя сечениями случайного поля. Он вычисляется по формуле

$$r_u(\rho_1, \rho_2) = \frac{R_u(\rho_1, \rho_2)}{\sqrt{D_u(\rho_1)}\sqrt{D_u(\rho_2)}}. \qquad (4.3)$$

Рассмотренные моменты называются пространственно-временными. Пространственно-временная корреляционная функция может характеризовать связь между значениями случайного поля в двух различных точках пространства в различные моменты времени. Наряду с пространственно- временными моментами рассматривают отдельно временные и отдельно пространственные моменты.

При определении временных моментов пространственные координаты точек поля считаются фиксированными, и изучается изменчивость поля во времени в данной фиксированной точке. И в этом случае мы имеем дело со случайными процессами. При рассмотрении пространственных моментов фиксируют момент времени и изучают поле в данный момент времени. В этом случае поле является случайной функцией координат точек пространства.

Однородное и изотропное случайное поле.

При изучении случайных процессов весьма важным является условие стационарности, существенно упрощающее описание случайного процесса. Для пространственных полей аналогичными условиями являются условия однородности и изотропности. Случайное поле называется однородным, если все $n-$мерные законы распределения не изменятся при переносе системы точек на один и тот же вектор, т.е. функции распределения (плотности распределения) не изменяются при замене сечений, соответствующих точкам $\rho_1, \rho_2, ...\rho_n$ сечениями, соответствующими точкам. $\rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0, ...$ При любом векторе $\rho_0$.

Для однородного случайного поля математическое ожидание не зависит от координат точек поля, т.е. является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от разности векторов $l = \rho_2 - \rho_1$.

Случайное поле называется изотропным, если все его законы распределения не изменяются при всевозможных вращения систем точек вокруг любой оси, проходящей через начало координат, и при зеркальном их отражении относительно любой плоскости, проходящей через начало координат.

Таким образом, для *однородного и изотропного* случайного поля в широком смысле слова математическое ожидание есть величина постоянная, а корреляционная функция зависит только от модуля $l$. Значит, для однородного и изотропного случайного поля $m_u = Const, R_u(|l|)$.

Многочисленные исследования структуры метеорологических полей указывают на существенное различие изменений метеорологических элементов в горизонтальном и вертикальном направлениях. Поэтому при изучении мезо – и макромасштабных метеорологических полей свойства однородности относят только к горизонтальным координатам. При этом предполагается, что однородными являются только центрированные случайные поля. Само математическое ожидание нельзя считать постоянным.

Как и для стационарных случайных процессов, если однородное изотропное случайное поле обладает эргодическим свойством, его математическое ожидание и корреляционную функцию можно находить осреднением по одной реализации, заданной в достаточно большой пространственной области. В этом случае математическое ожидание определяется по формуле

$$m_u = \frac{1}{v}\iiint_d u(x, y, z)\,dxdydz, \qquad (4.4)$$

где $d$ - пространственная область, по которой производится осреднение, а $v$ - объем этой области.

Для плоского поля

$$m_u = \frac{1}{S}\iint_d u(x, y)dxdy, \qquad (4.5).$$

где $s$ - площадь плоской области $d$

Для характеристики однородного и изотропного случайного поля наряду с корреляционной функцией используют и структурную функцию.

$$B_u(l) = 2\left[R_u(0) - R_u(l)\right]. \qquad (4.6)$$