Лекция № 3

Система случайных процессов, корреляционная функция связи. Влияние ошибок исходных данных на характеристики случайных процессов.

Часто приходится рассматривать совместно несколько случайных процессов. При этом помимо характеристики каждого случайного процесса, существенным является установление связи между различными процессами.

Например, при изучении явлений погоды приходится совместно рассматривать ряд случайных процессов. Такими процессами могут быть изменения температуры, влажности, давления и т.д. Подобно системе случайных величин, систему случайных процессов можно рассматривать как $n-$случайный вектор, зависящий от аргумента t. Мы не будем описывать многомерные законы распределения системы случайных процессов вследствие их громоздкости и невозможности практического использования. Остановимся только на первых двух моментах, которые только используются на практике. Начальные моменты первого порядка совпадают с математическими ожиданиями соответствующих случайных процессов. Центральные моменты второго порядка могут быть двух видов – автокорреляционная функция каждого случайного процесса системы и взаимная корреляционная функция системы случайных процессов или корреляционная функция связи. Остановимся подробнее на второй функции. Этот центральный момент рассчитывается по следующей формуле

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M\{[X(t_1)-m_x(t_1)]\}[Y(t_2)-m_y(t_2)]\} \qquad (3.1)$$

Корреляционная функция связи (3.1) характеризует степень линейной зависимости между сечениями $X(t_1),Y(t_2)$. При $t_1 = t_2$ корреляционная функция связи будет характеризовать степень линейной зависимости сечений случайных процессов при одном и том же сечении. Следует отметить, что корреляционная функция связи не является симметричной относительно своих аргументов, однако обладает тем свойством, что не изменяется при *одновременной* перестановке аргументов и индексов.

$$R_{yx}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_2,t_1) \qquad (3.2)$$

Корреляционная функция связи не зависит от того, что к случайному процессу прибавляется неслучайная функция. Поэтому ее можно вычислять, пользуясь центрированными случайными процессами. При фиксированных значениях аргументов $t_{1,}t_2$ функция $R_{xy}(t_1,t_2)$ есть момент связи между двумя случайными величинами $X(t_1),Y(t_2)$, поэтому

$$\left|R_{xy}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2) \qquad (3.3).$$

Вместо корреляционной функции связи рассматривают безразмерную величину, называемую нормированной корреляционной функцией связи

$$r_{xy}(t_1,t_2) = \frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma(t_2)} \qquad (3.4).$$

Из формулы (3.4) видно, что

$$\left|r_{xy}(t_1,t_2)\right| \le 1. \qquad (3.5)$$

Нормированная корреляционная функция связи при фиксированных значениях аргументов представляет собой коэффициент корреляции случайных величин $X(t_1),Y(t_2)$. Если корреляционная функция связи тождественно равна нулю, то случайные процессы называются некоррелированными или несвязными линейно.

При наличии системы n случайных процессов $X_1(t), X_2(t), X_3(t),...X_n(t)$ ее характеризуют, помимо математического ожидания, корреляционной матрицей, каждый элемент которой представляет собой соответственно автокорреляционную или взаимную корреляционную функцию аргументов $t_{1,}t_2$.

Пусть случайный процесс $Z(t)$ представляет собой сумму двух других случайных процессов $X(t), Y(t)$.

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \qquad (3.6)$$

Найдем корреляционную функцию и математическое ожидание случайного процесса $Z(t)$.

При каждом фиксированном значении t, согласно свойству математического ожидания, получаем

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) \qquad (3.7)$$

Таким образом, для определения математического ожидания суммы двух случайных процессов нужно знать математическое ожидание каждого из них.

Вычислим корреляционную функцию $R_z(t_1, t_2)$. После несложных преобразований получим

$$R_z(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) + R_y(t_1,t_2) + R_{xy}(t_1,t_2) + R_{yx}(t_1,t_2) \qquad (3.8)$$

Используемые при обработке экспериментальные данные неизбежно содержат ошибки, зависящие от точности используемых методов наблюдений и приборов измерений.

Будем считать, что ошибки измерений представляют собой случайных процесс $Y(t)$ со своим математическим ожиданием и автокорреляционной функцией. Тогда каждая реализация случайного процесса, полученная в результате опыта, будет представлять собой сумму истинного значения реализации и ошибки измерения

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i(t) \qquad (3.9),$$

при этом оценка математического ожидания $\hat{m}_z(t)$ в соответствии с (1.) будет равна

$$\hat{m}_z(t_j) = \frac{1}{n}\sum_i^n [x_i + y_i] = \hat{m}_x(t_j) + \hat{m}_y(t_j) \qquad ((3.10).$$

Поскольку в данном случае нас интересует только влияние ошибок измерения, будем считать, что число реализаций достаточно велико, так что статистические характеристики рассматриваемых процессов практически не отличаются от соответствующих истинных значений. Тогда (3.10) можно записать в виде

$$\hat{m}_z = \hat{m}_x + \hat{m}_y \qquad (3.11)$$

Оценка корреляционной функции определяется в виде

$$\hat{R}_z(t_i,t_j) = R_x(t_i,t_j) + R_y(t_i,t_j) + R_{xy}(t_i,t_j) + R_{yx}(t_i,t_j). \qquad (3.12)$$

Если считать, что ошибки измерений не коррелированны между собой и не коррелированны с истинным значением случайного процесса, то

$$\hat{R}_z(t_i,t_j) = \{\frac{R_x(t_i,t_j)}{\sigma_x^{\ 2} + \sigma_y^2} \text{ при } i \neq j \text{, при } i = j \qquad (3.13)$$

Из последней формулы следует, что в рассматриваемом случае ошибки измерений не влияют на оценку корреляционной функции случайного процесса, но завышают дисперсию. Оценка нормированной корреляционной функции определится при этом следующим образом

$$\hat{r}_z(t_i, t_j) = \frac{\wedge \hat{R}(t_j, t_i)}{\hat{\sigma}_z(t_i)(t_j)} \qquad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что ошибки измерений занижают оценку нормированной корреляционной функции.

Для стационарных случайных процессов корреляционные функции зависят от одного параметра $\tau = |t_2 - t_1|$, а дисперсии есть постоянные величины. Тогда получаем формулу

$$\hat{r}_z(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^{2.}} \qquad (3.15)$$

Разделив числитель и знаменатель в формуле (3.15) σ_x^2, получим

$$\hat{r}_z(\tau) = r_x(\tau)\frac{1}{1+\delta} \qquad (3.16),$$

где $r_x(\tau)$ – истинное значение нормированной корреляционной функции, а $\delta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$.

При $\tau \to 0$ нормированная корреляционная функция стремится к единице, следовательно $\hat{r}_z(\tau) \to \frac{1}{1+\delta}$, что и позволяет определить величину δ путем построения графика функции $\hat{r}_z(\tau)$, начиная со значения $\tau = \tau_0$ и экстраполяцию ее в точку $\tau = 0$. Если τ_0 малая величина, то экстраполяцию можно произвести графически. Определим величину

$$1 + \delta = \frac{1}{\hat{r}_z(0)} (3.17).$$

Теперь заниженные оценки нормированной корреляционной функции можно исправить, умножив их на найденную величину $1+\delta$.

Для исправления завышенной оценки дисперсии случайной функции, нужно, согласно формуле

$$\sigma_z^2 = \frac{\hat{\sigma}_z^2}{1+\delta} \qquad (3.18)$$

разделить полученное значение $\hat{\sigma}_z^2$ на величину $1+\delta$.

Оценка структурной функции получается завышенной на удвоенное значение дисперсии ошибок.