Лекция 2.

Случайные процессы и их вероятностные характеристики. Стационарный случайный процесс. Корреляционная функция стационарного случайного процесса. Аппроксимация корреляционной функции ССП.

Случайный процесс или случайная функция - это обобщение понятия случайной величины. В случае случайного процесса результатом опытов является не число или определенная величина, а некоторая функция времени, которая при повторении опытов в одинаковых условиях каждый раз случайным образом меняет свой вид. Случайная функция является функцией одного или нескольких переменных.

Неслучайная функция, получающаяся в результате каждого опыта, называется *реализацией* случайного функции. При каждом повторении опыта будем получать новую реализацию. Следовательно, случайную функцию (случайный процесс) $X(t)$ можно рассматривать как множество всех ее реализаций. Такой статистический подход очень удобен при исследовании многих метеорологических процессов и полей. Например. при обработке данных самописцев (термографа или барографа). Каждая лента самописца может быть рассмотрена как реализация случайного процесса. Наглядным примером случайной функции может служить турбулентная диффузия. Одним из методов изучения турбулентной диффузии в реальной атмосфере является применение трансзондов – уравновешенных шаров-пилотов, вес которых подбирается так, чтобы они свободно плавали в воздухе вблизи какой-нибудь изобарической поверхности. Каждый такой зонд рассматривается как частица в потоке газа. Регистрируя значение какой-нибудь координаты одной из таких частиц через определенные промежутки времени, мы получим реализацию случайного процесса.

На рис 2.1 изображено несколько реализаций зональной составляющей траектории частицы.

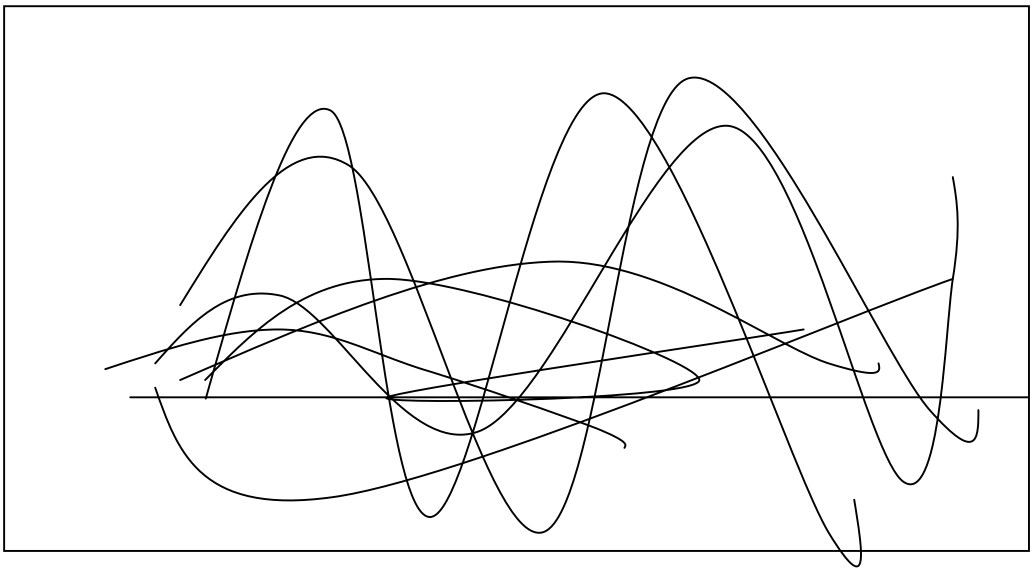

Рис2.1

Каждая кривая на рис 2.1 представляет собой реализацию случайного процесса.

Рассмотрим теперь случайный процесс с другой стороны. Зафиксируем определенный момент времени $t = t_0$ и восстановим перпендикуляр в этой точке. При этом данный перпендикуляр рассечёт все реализации случайного процесса. Точки пересечения перпендикуляра со всеми реализациями представляют собой значения некой случайной величины, которую называют *сечением* случайного процесса (функции). Тогда случайный процесс можно рассматривать как совокупность всех его случайных сечений, то есть как совокупность всех случайных величин, соответствующих моментам времени $t = t_1, t_2, t_3, \ldots t_i, \ldots$.

Как уже говорилось, случайная величина считается полностью определенной, если известна ее функция распределения

$$F(x) = P(X < x) \qquad (2.1)$$

Система случайных величин определена, если задана ее функция распределения

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) \qquad (2.2)$$

Случайный процесс приближенно считается полностью определенным, если известна совместная функция распределения множества его сечений. И, чем ближе сечения расположены друг относительно друга, тем функция распределения будет полнее описывать случайный процесс.

Исходя из этого, случайный процесс $X(t)$ считается заданным, если для каждого значения t определена функция распределения случайной величины $X(t)$

$$F_1(x;t) = P[X(t) < x], \qquad (2.3)$$

для каждой пары значений t_1, t_2 аргумента t определена функция распределения системы случайных величин X_1, X_2, и вообще для любых n значений аргумента t определена n-мерная функция распределения системы случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n$.

Функция (2.3) называется одномерной функцией распределения случайного процесса, и она не учитывает *взаимную зависимость* между различными сечениями. Для полной характеристики случайного процесса нужно задать все многомерные функции распределения.

В качестве характеристик случайного процесса, как и случайных величин, можно пользоваться моментами распределения. Моментом первого порядка называется *математическое ожидание* случайного процесса, которое зависит от времени

$m_x(t)$.

Математическое ожидание полностью определяется закон распределения первого порядка

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x;t)dx. \qquad (2.4)$$

Центральный момент $\mu_{2,0}(t)$ является функцией аргумента времени, и при каждом фиксированном значении времени t представляет собой дисперсию соответствующего случайного сечения. Это неслучайная функция аргумента времени

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} \qquad (2.5)$$

называется *дисперсией* случайного процесса.

Неслучайную функцию двух аргументов t_1, t_2

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \qquad (2.6)$$

называется корреляционной функцией случайного процесса. При равенстве аргументов корреляционная функция превращается в дисперсию, то есть

$$R_x(t_1,t_1)=D_x(t_1) \qquad (2.7)$$

Корреляционную функцию можно записать, пользуясь двумерным дифференциальным законом распределения случайного процесса

$$R_x(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[x_1-m_x(t_1)][x_2-m_x(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \qquad (2.8)$$

Из определения корреляционной функции видно, что она симметрична относительно своих аргументов. Вместо корреляционной функции можно пользоваться *нормированной корреляционной функцией* $r_x(t_1,t_2)$, определяемой в виде

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \qquad (2.9),$$

где $\sigma_x(t)=\sqrt{D_x}(t)$ - среднее квадратическое отклонение случайного процесса. Для каждой пары значение аргументов t_1,t_2 нормированная корреляционная функция есть ни что иное, как коэффициент корреляции соответствующих сечений случайного процесса. Она показывает линейную связь между этими сечениями.

Наиболее простыми для изучения и статистического описания являются такие случайные процессы, статистические свойства которых не изменяются с изменением аргумента.

Такие процессы называются *стационарными.*

Случайный процесс называется стационарным, если все его конечномерные законы распределения не изменяются при прибавлении ко всем значениям аргумента одного и того же числа, то есть , если все они зависят только от взаимного расположения значений аргумента, но не от самих этих значений.

Иными словами, стационарный случайный процесс (ССП) $X(t)$ называется таким в широком смысле слова, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция есть функцией только одного аргумента $\tau=|\,t_1-t_2\,|$.

Оценка корреляционной функции ССП производится по следующей формуле

$$\hat{R}(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}(x_i-\hat{m}_x)(x_{i-\tau}-\hat{m}_x) \qquad (2.10),$$

где $\hat{m}_x$ - оценка математического ожидания. Из последней формулы видно, что в нуле корреляционная функция равно оценке дисперсии $\hat{D}_x$.. Оценить нормированную корреляционную функцию можно по формуле

$$\hat{r}_x(\tau)=\frac{\hat{R}_x(\tau)}{\hat{D}_x} \qquad (2.11).$$

В нуле $\hat{r}_x(\tau)$ равно единице. Для метеорологических процессов предположение о стационарности достаточно хорошо подтверждается для сравнительно небольших интервалов времени. С увеличением интервалов изменения аргумента наблюдается нарушение стационарности.

При исследовании статистической структуры процессов чаще всего встречаются стационарные случайные процессы, корреляционные функции которых аппроксимируются функциями следующих типов:

$$R_x(\tau) = D_x \exp(-\alpha\tau), \alpha > 0;$$
$$R_x(\tau) = D_x \exp(-\alpha\tau)\cos\beta\tau, \alpha, \beta > 0; \qquad (2.12)$$
$$R_x(\tau) = D_x \exp(-\alpha\tau^2)\cos\beta\tau, \alpha, \beta > 0$$

В качестве характеристики ССП наряду с корреляционной функцией рассматривают структурную функцию, которую определяют как математическое ожидание квадрата разности сечений случайного процесса, соответствующих значениям аргумента t и $t+\tau$

$$B_x(\tau) = M\{[X(t+\tau) - X(\tau)]^2\}. \qquad (2.13)$$

Из определения видно, что структурная функция неотрицательна.

Структурную функцию можно выразить через корреляционную функцию

$$B_x(\tau) = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]. \qquad (2.14)$$

Из (2.14) и свойств корреляционной функции получаем, что

$$B_x(\tau) = B_x(-\tau),$$
$$B_x(0) = 0. \qquad (2.15)$$

Понятие об эргодичности случайных процессов.

До сих пор мы определяли характеристики случайного процесса путем осреднения по множеству всех реализаций.

Однако возможен другой способ осреднения, в случае, когда имеет место лишь одна реализация большой продолжительности. Если связь между различными сечениями СП убывает быстро, то те части реализации, которые можно считать независимыми между собой, рассматривают как совокупность реализаций. Естественно, что такой способ можно использовать только для ССП.

Для ССП математическое ожидание (среднее значение) не зависит от аргумента, поэтому можно попытаться, не разделяя реализацию на отдельные части, определить его как среднее арифметическое из всех значений данной реализации. В этом случае математическое ожидание определится по формуле

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \qquad (2.16)$$ где $T-$ интервал осреднения.

Аналогично корреляционную функцию - как среднее арифметическое произведение по формуле (2.10).

Возникает вопрос, будут ли эти значения близки к соответствующим значениям, полученным осреднением по совокупности. Оказывается, это будет иметь место только в случае эргодичности СП.

Говорят, что случайный процесс, для которого статистические характеристики, полученные осреднением по одной реализации, при увеличении интервала осреднения T с вероятностью сколь угодно близкой к единице могут быть приближены к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций, обладает эргодическим свойством. Свойство эргодичности имеет большое практическое значение, так как чаще всего в метеорологии мы имеем для исследования только одну реализацию. Для надежного определения искомых характеристик нужно брать интервал осреднения во много раз большим, чем время корреляции T_1 , которое определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{R_x(0)}\int_0^\infty R_x(\tau)d\tau \qquad (2.17)$$